# Neue Integralrelationen für Eikörperpaare.

Von H. HADWIGER in Bern.

Unter den sehr zahlreichen Formeln und Sätzen, welche die Integralgeometrie hervorbrachte, finden sich viele reizvolle Integralbeziehungen, welche in irgend einer Form eine Wechselwirkung zwischen zwei konvexen Körpern ausdrücken[1]).

Eine neuartige Relation dieser Art haben kürzlich L. RÉDEI und B. SZ.-NAGY[2]) im zweidimensionalen Fall gefunden, die durch Grenzübergang aus einer Produktformel für die Flächeninhalte ebener Polygone gewonnen wurde. Die erwähnte Integralformel läßt sich nun — zunächst für konvexe Körper — in ihrer $k$-dimensionalen Erweiterung auf eine völlig andere und einfache Weise wiedergewinnen.

Sie gehört zu einer umfassenderen Gruppe ähnlich gebauter Integralrelationen, welche in dieser Note genannt und kurz begründet werden sollen. Es handelt sich hierbei um die Anwendung eines Funktionalprinzips, die darin besteht, ein in Frage stehendes Funktional im wesentlichen unmittelbar aus gewissen Invarianz- und Additivitätseigenschaften zu folgern. Allgemeinere Funktionalsätze, welche die Anwendung des erwähnten Prinzips ermöglichen, sind vom Verf. untersucht worden[3]).

Wir stellen nun zunächst die nachher zu beweisenden Integralrelationen zusammen. Diese beziehen sich auf zwei Eikörper $A$ und $A_0$ des $k$-dimensionalen euklidischen Raumes mit den Volumen $V$ und $V_0$ und lauten:

$$\int r^2 \cos\gamma \, dF \, dF_0 = -2kVV_0; \tag{1}$$

$$\int r^2 \cos\alpha \cos\alpha_0 \, dF \, dF_0 = -k(k+1)\, VV_0; \tag{2}$$

---

[1]) Vgl. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie* (Leipzig und Berlin, 1936), Hefte I—II.

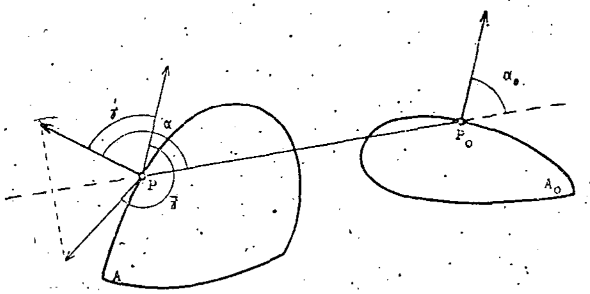
[2]) L. RÉDEI—B. SZ.-NAGY, Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron, *Publicationes Math. Debrecen,* 1 (1949), S. 42—50.

[3]) Ein Beweis eines solchen Funktionalsatzes für $k=3$ erscheint demnächst in den *Abhandlungen des Math. Seminars der Univ. Hamburg.*

$$\int r^2 \cos\bar{\gamma}\, dF\, dF_0 = -2k^2 V V_0. \tag{3}$$

Hierbei bezeichnen (vgl. Abbildung) $dF$ und $dF_0$ die Oberflächendifferentiale von $A$ und $A_0$ an den Oberflächenstellen $P$ und $P_0$, ferner sei $r$ die Distanz von $P$ und $P_0$, $\gamma$ der Zwischenwinkel der äußeren Normalen an $A$ und $A_0$ in $P$ und $P_0$; weiter sind $\alpha$ und $\alpha_0$ die Winkel, welche die genannten Normalen je mit der Verbindungsrichtung von $P$ nach $P_0$ hin einschließen; endlich bezeichnet $\bar{\gamma}$ den Zwischenwinkel, den die an der erwähnten Verbindungsrichtung gespiegelte Normale in $P$ mit der Normalen in $P_0$ bildet.

Setzt man in (3) $k=2$, so ergibt sich die oben erwähnte Integralformel von L. Rédei und B. Sz.-Nagy für den speziellen Fall zweier Eibereiche; die zitierte Formel gilt indessen für allgemeiner gestaltete ebene Bereiche.




Die trigonometrische Umrechnungsformel

$$\cos\bar{\gamma} = -\cos\gamma + 2\cos\alpha\cos\alpha_0$$

zeigt, daß (3) eine einfache Folgerung aus (1) und (2) ist, sodaß sich unsere Beweisführung nur auf die beiden ersten Integralrelationen beschränken kann. Nun zum Beweis selbst: Die beiden in (1) und (2) stehenden Integralausdrücke stellen symmetrische Bifunktionale des Eikörperspaares $A$, $A_0$ dar. In vektorieller Schreibweise gestatten diese die folgende Darstellung

$$\varphi(A, A_0) = \int (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)^2\, (\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0 \tag{4}$$

$$\psi(A, A_0) = \int (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0, \mathfrak{w})\, (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0. \tag{5}$$

Hierbei bezeichnen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ die in einem festen Ursprung $O$ des Raumes angreifenden Ortsvektoren der Oberflächenstellen $P$ und $P_0$ und weiter sollen $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}_0$ die äußeren Normaleneinheitsvektoren in $P$ und $P_0$ bedeuten.

Nach einem bekannten, für konvexe Polyeder elementaren, für beliebige Eikörper durch Grenzübergang mühelos verifizierbaren vektoranalytischen Hilfssatz[4]) ist stets

$$\int (\mathfrak{a}, \mathfrak{w})\, dF = 0, \tag{6}$$

wobei $\mathfrak{a}$ einen festen Vektor bezeichnet und sich die Integration über die gesamte Oberfläche eines konvexen Körpers zu erstrecken hat. Wie man leicht bestätigt, ergibt passende Anwendung von (6) für unsere Bifunktionale die nunmehr einfacheren Darstellungen

$$\varphi(A, A_0) = -2 \int (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0; \tag{7}$$

$$\psi(A, A_0) = -\int \{(\mathfrak{x}, \mathfrak{w})(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{w}_0) + (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{w})(\mathfrak{x}, \mathfrak{w}_0)\}\, dF\, dF_0. \tag{8}$$

Wir betrachten jetzt zunächst das Bifunktional (7) und denken uns vorerst den Eikörper $A_0$ fest, den Eikörper $A$ dagegen variabel; dies sei äußerlich durch den veränderten Ansatz

$$\varphi(A) = -2 \int (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0, \tag{9}$$

wodurch ein gewöhnliches Eikörperfunktional definiert ist, zum Ausdruck gebracht. Ersetzen wir nun $A$ durch einen translationsgleichen Eikörper $A'$, so haben wir offenbar

$$\varphi(A') = -2 \int (\mathfrak{x} + \mathfrak{t}, \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0, \tag{10}$$

wobei $\mathfrak{t}$ den Vektor derjenigen Translation bezeichnet, die $A$ in $A'$ überführt. Die erneute Anwendung von (6) ergibt nun die wichtige Feststellung, daß

$$\varphi(A') = \varphi(A), \tag{11}$$

d. h. daß das Funktional (9) *translationsinvariant* ist. Unmittelbar ablesbar ist ferner Relation

$$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B), \tag{12}$$

wobei ein Eikörper $C = A + B$ durch eine Ebene in die beiden Teilkörper $A$ und $B$ zerlegt sei; dadurch ist ausgedrückt, daß das Funktional (9) *einfach-additiv* ist.

Ebenso läßt sich auch folgendes unmittelbar erkennen: Es gibt eine nicht von $A$ abhängige Konstante $C$, sodaß

$$|\varphi(A)| \leq C \qquad \text{für alle } A \subseteq K; \tag{13}$$

d. h. für alle Teilkörper $A$ der Einheitskugel $K$ gilt; dadurch ist ausgesagt, daß das Funktional (9) beschränkt ist.

Ersetzen wir endlich $A$ durch einen sich durch Dilatation von $O$ aus ergebenden homothetischen Eikörper $A' = \lambda A$ $(\lambda > 0)$, so hat man zunächst

[4]) Es handelt sich um einen speziellen Hüllensatz, der sich auch als einfachste Folgerung des Gaußschen Integralsatzes darstellen läßt.

(14) $$\varphi(\lambda A) = -2\int(\lambda\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{w}\ \mathfrak{w}_0)\,dF'\,dF_0$$

und wegen $dF' = \lambda^{k-1}dF$ also

(15) $$\varphi(\lambda A) = \lambda^k\varphi(A),$$

eine Beziehung, die besagt, daß das Funktional (9) *k-gradig homogen* ist.

Nun gilt aber ein Satz[5]), wonach ein translationsinvariantes, einfach-additives, beschränktes und $k$-gradig homogenes Funktional über der Klasse der Eipolyeder des $k$-dimensionalen Raumes sich bis auf einen konstanten Faktor mit dem Volumen identifiziert. Stetigkeitserwägungen, wie sie im vorliegenden Fall schulmäßig durchführbar sind, gestatten es, den erwähnten Satz auf Eikörper auszudehnen. Nach (11), (12), (13) und (15) folgt so, daß $\varphi(A) = \bar{p}V$ sein muß, wobei $\bar{p}$ einen offenbar nur noch von $A_0$ abhängigen konstanten Faktor bezeichnet. Vertauschen wir jetzt die Rollen von $A$ und $A_0$ in der oben stehenden Entwicklung, so ergibt sich schließlich

(16) $$\varphi(A, A_0) = pVV_0.$$

Auf durchaus analoge Weise gewinnt man entsprechend

(17) $$\psi(A, A_0) = qVV_0.$$

Die noch unbekannten konstanten Faktoren $p$ und $q$ ergeben sich dadurch, daß man die Bifunktionale in passend ausgewählten Sonderfällen direkt ausrechnet. Setzen wir $A = A_0 = K$, wobei $K$ eine Einheitskugel bezeichnet, so ergeben sich die Werte $p = -2k$ und $q = -k(k+1)$. Wenn die beiden Eikörper $A$ und $A_0$ identifiziert werden, so hat sich das Doppelintegral der Entstehungsweise gemäß über die „doppelt belegte" Oberfläche zu erstrecken. Damit ist der Nachweis der Integralrelationen (1) und (2) erbracht.

Abschließend sollen die Anwendungsmöglichkeiten der drei Formeln (1) bis (3) durch drei passend gewählte Beispiele illustriert werden.

**1.** Der in der Relation (1) stehende Integralausdruck ist, wie wir oben erwähnten, mit dem in (7) angeschriebenen aequivalent. Demnach hat man

(18) $$\int(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_0)\,dF\,dF_0 = kVV_0.$$

Ersetzen wir jetzt die beiden der Integralformel (18) zugrunde liegenden Eikörper $A$ und $A_0$ durch ihre äußeren Parallelkörper $A^\varrho$ und $A_0^\varrho$ im

[5]) Eine Abhandlung, welche Sätze dieser Art enthält, wird unter dem Titel „Über translationsinvariante und additive Funktionale $k$-dimensionaler Polyeder" demnächst im Druck erscheinen.

Abstand $\varrho > 0$, greift man auf die Umrechnungsformeln

$$\mathfrak{x}^{\varrho} = \mathfrak{x} + \varrho \mathfrak{w}$$

und

$$dF^{\varrho} = [1 + (k-1) H\varrho + \cdots + K\varrho^{k-1}]\, dF,$$

wobei $H$ die mittlere Krümmung und $K$ die Gaußsche Krümmung bezeichnen[6]), verwendet schließlich für die Parallelvolumina noch die J. Steinerschen Formeln

$$V^{\varrho} = V + F\varrho + \cdots + \omega_k \varrho^k; \quad \omega_k = \pi^{\frac{k}{2}} \Big/ \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right),$$

so gewinnt man durch Gleichsetzung der Koeffizienten des höchsten Potenzgliedes $\varrho^{2k}$ beiderseitig von (18) die Integralrelation

$$\int \cos^2 \gamma \; K K_0 \, dF \, dF_0 = k \omega_k^2. \tag{19}$$

Man gewinnt die Einsicht, daß unsere Formeln (1) und (19) Anfang und Ende einer Serie von $2k+1$ Integralrelationen mit höheren Krümmungsfunktionen darstellen; die übrigen $2k-1$ Formeln sind indessen komplizierter aufgebaut und sollen aus diesem Grunde nicht weiter verfolgt werden.

**2.** Wenn wir in der Relation (2) die beiden Eikörper $A$ und $A_0$ identifizieren, die Integration jedoch nur über die „einmal belegte" Oberfläche erstrecken, so erhält man

$$\int \cos \alpha \cos \alpha_0 \, r^2 \, dF \, dF_0 = -\frac{k(k+1)}{2} V^2. \tag{20}$$

Nun ist nach bekannten Ansätzen der Integralgeometrie

$$-\cos \alpha \cos \alpha_0 \, dF \, dF_0 = r^{k-1} \, dG,$$

wobei $dG$ die *Geradendichte* bedeutet; $dG$ symbolisiert die integralgeometrische „Anzahl" derjenigen Geraden $G$, welche die beiden Oberflächenelemente $dF$ und $dF_0$ durchstoßen. So gewinnt man aus (20) die integralgeometrische Formel

$$\int r^{k+1} \, dG = \frac{k(k+1)}{2} V^2, \tag{21}$$

wobei sich die Integration über alle Geraden $G$ erstrecken soll, die den Eikörper $A$ treffen; $r$ ist die Länge der von $G$ aus $A$ ausgeschnittenen Sehne. Auf diese Weise haben wir ein *Sehnenpotenzintegral* erhalten,

[6]) Die für das Vorhandensein dieser Krümmungsgrößen erforderlichen Regularitätsvoraussetzungen betreffend die Eiflächen sollen hier erfüllt sein.

das die $k$-dimensionale Erweiterung einer bekannten Formel von G. HERGLOTZ[7]) darstellt.

**3.** Der in Relation (3) gewählte Winkel $\bar{\gamma}$ verdient auch wohl deshalb ein gewisses Interesse, weil er für den Fall $A = A_0 =$ Kugel beständig den Wert $\bar{\gamma} = \pi$ annimmt. Dieser Umstand hat die Konsequenz, daß die sich aus (3) auf triviale Weise ergebende Ungleichung

$$\int r^2\, dF dF_0 \geqq 2k^2\, VV_0 \tag{22}$$

in dem Sinne scharf ist, als für ein besonderes Eikörperpaar das Gleichheitszeichen in Kraft gesetzt wird. Wählen wir für (22) die vektorielle Schreibweise, indem wir $r^2 = (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)^2$ setzen, wobei wie oben $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ die Ortsvektoren der Oberflächenstellen auf $A$ und $A_0$ bedeuten, so ergibt die Ausrechnung des Skalarquadrates die Ungleichung

$$T + T_0 \geqq 2k^2 \frac{VV_0}{FF_0} + 2(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0). \tag{23}$$

Hier treten die beiden Trägheitsmomente

$$T = \frac{1}{F}\int \mathfrak{x}^2\, dF,\quad T_0 = \frac{1}{F_0}\int \mathfrak{x}_0^2\, dF_0 \tag{24}$$

der mit der Einheitsmasse homogen belegten Eiflächen auf und weiter wurden die Ortsvektoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_0$ der beiden Schwerpunkte der Eiflächen eingeführt, die auf Grund der Relation

$$\frac{1}{FF_0}\int (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)\, dF dF_0 = (\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0) \tag{25}$$

sich hier Zugang verschaffen. Die Ungleichung (23) wurde im Falle $k = 2$ in einer etwas spezielleren Form von L. RÉDEI und B. SZ.-NAGY[8]) hergeleitet. Identifizieren wir noch $A$ mit $A_0$, so ergibt sich für das Trägheitsmoment $T$ einer homogen mit der Einheitsmasse belegten Eifläche bezüglich $O$ die Abschätzung

$$T \geqq \left(\frac{kV}{F}\right)^2 + \sigma^2 \tag{26}$$

wobei $\sigma$ den Abstand des Eiflächenschwerpunktes von $O$ bezeichnet.

*(Eingegangen am 13. Oktober 1950.)*

---

[7]) Göttinger Vorlesung S. S. 1933; zitiert nach W. BLASCHKE, loc. cit. [1]). Fall $k = 2$ bzw. $k = 3$ vgl. insb. Heft I (112) S. 20 bzw. Heft II (101) S. 77. — In einer inhaltsreichen Abhandlung hat O VARGA [Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum, *Math. Zeitschrift*, 40 (1935), S. 387–405] allgemeinere Typen derartiger Integrale und ihre gegenseitigen Beziehungen untersucht. Die Formel von Herglotz ist dort mit (16') S. 401 angeführt. Es scheint, daß die Exponenten $n = 0, 1, k+1$ die einzigen sind, für welche die Sehnenpotenzintegrale $k$-dimensionaler Eikörper durch die Minkowskischen Maßzahlen einfach ausdrückbar werden.

[8]) Loc cit. [2]) (16) p. 49.